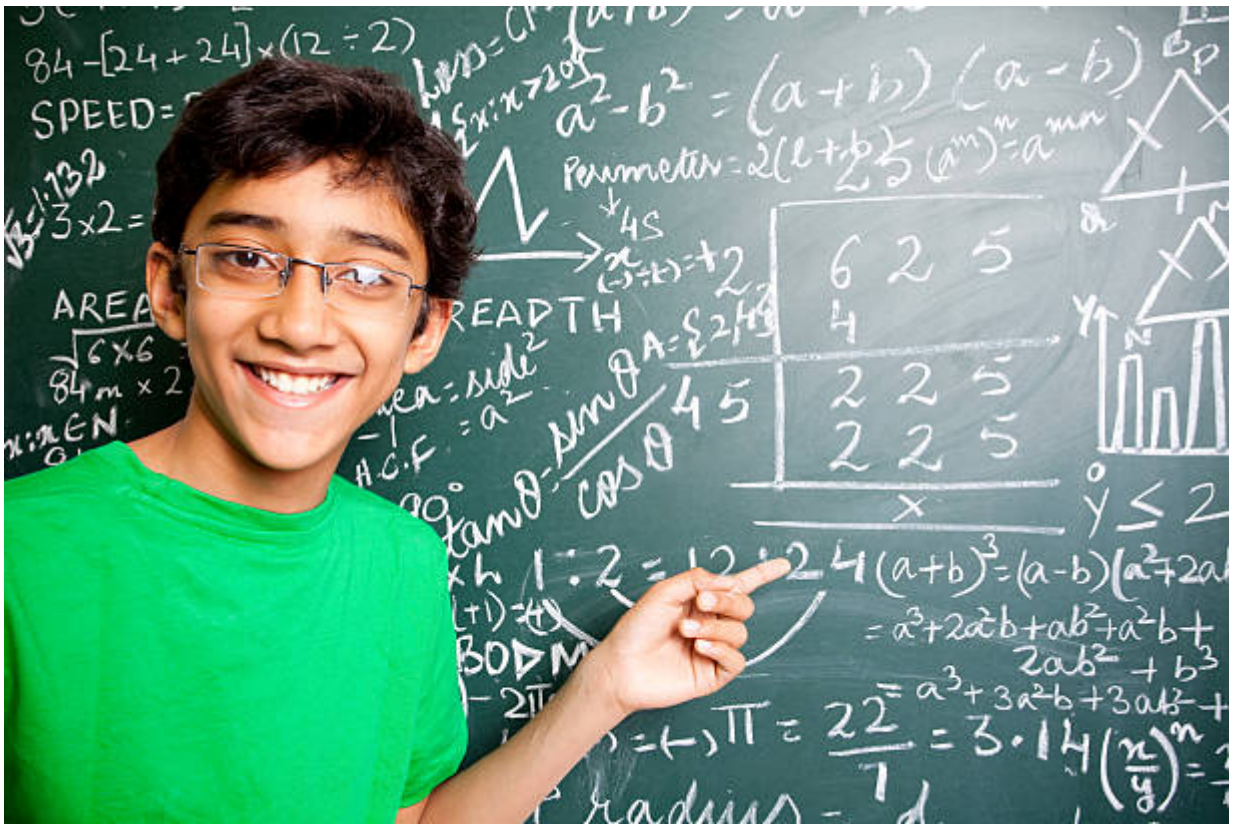
Halo! Apa kabar semuanya? Semoga selalu dalam keadaan baik-baik saja ya! Di kesempatan kali ini kita akan melanjutkan materi Matematika kelas 10 bab 2 mengenai sistem persamaan linear tiga variabel.

Apakah kamu sudah siap? Jangan lupa buka buku tulismu, siapkan pensil, dan buku ajar Matematika keluaran Kemdikbud. Oke, langsung simak ulasan di bawah ini ya!

Bab 2:
Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel



Cheerful Indian Boy/Student with Mathematics Problems

2.1 Menyusun dan Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Download dari situs https://wirahadie.com

Definisi 2.1

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Contoh 2.1

Diketahui tiga persamaan 1/x + 1/y + 1/z = 2, 2p + 3q – r = 6, dan p + 3q = 3.

Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel, sebab persamaan 1

/x + 1/y + 1/z = 2 bukan persamaan linear. Jika persamaan 1/x + 1/y + 1/z = 2 diselesaikan, diperoleh persamaan z(x + y) + xy = 2xyz yang tidak linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

2.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Perbedaan antara sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dengan sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) terletak pada banyak persamaan dan variabel yang digunakan. Oleh karena itu, penentuan himpunan penyelesaian SPLTV dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian SPLDV, kecuali dengan metode grafik. Umumnya penyelesaian sistem persamaan linear tiga variable diselesaikan dengan metode eliminasi dan substitusi.

Definisi 2.2

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variable adalah suatu himpunan semua triple terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Contoh 2.3

Jumlah tiga bilangan sama dengan 45. Bilangan pertama ditambah 4 sama dengan bilangan kedua, dan bilangan ketiga dikurangi 17 sama dengan bilangan pertama. Tentukan masing-masing bilangan tersebut.

Download dari situs https://wirahadie.com

Alternatif Penyelesaian

Misalkan :

x = bilangan pertama

y = bilangan kedua

z = bilangan ketiga

Berdasarkan informasi pada soal diperoleh persamaan sebagai berikut.

$x + y + z = 45$ (2.16)

$x + 4 = y$ (2.17)

$z - 17 = x$ (2.18)

Ditanyakan:

Bilangan x, y, dan z.

Kamu dapat melakukan proses eliminasi pada persamaan (2.16) dan (2.17), sehingga diperoleh

Download dari situs https://wirahadie.com

$$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 45 \\ x-y &=& -4 \\ \hline 2x+z &=& 41 \end{array} +$$

Diperoleh persamaan baru, $2x + z = 41$ (2.19)

Lakukan proses eliminasi pada persamaan (2.18) dan (2.19), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{rcl} x-z &=& -17 \\ 2x+z &=& 41 \\ \hline 3x &=& 24 \end{array} +$$

Diperoleh $3x = 24$ atau $x = \frac{24}{3}$ atau $x = 8$.

Lakukan proses substitusi nilai $x = 8$ ke persamaan (2.17) diperoleh

$(8) + 4 = y \Rightarrow y = 12$

Substitusikan $x = 8$ ke persamaan (2.18) diperoleh

$z - 17 = (8) \Rightarrow z = 25$

Dengan demikian, bilangan $x = 8$, bilangan $y = 12$, dan bilangan $z = 25$.

Selain metode eliminasi, substitusi, dan campuran antara eliminasi dan substitusi (kamu dapat mencoba sendiri), terdapat cara lain untuk menyelesaikan suatu SPLTV, yaitu dengan cara determinan dan menggunakan invers matriks. Namun, pada bab ini metode ini tidak dikaji.

Sekarang kita akan menemukan **penyelesaian** SPLTV dengan metode lain. Kita menententukan himpunan penyelesaian SPLTV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum SPLTV yang telah ditemukan dengan mengikuti langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan cara baru.

Perhatikan bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah sebagai berikut.

Download dari situs https://wirahadie.com

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (2.12) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (2.13) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & (2.14) \end{cases}$$

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

Download dari situs https://wirahadie.com

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, x, y, dan $z \in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0 dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah 1

Eliminasi variabel x dari Persamaan (2.12) dan Persamaan (2.13) menjadi

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_2 & a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \times a_1 & a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \\ & & \hline & & (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \quad (2.20)$$

Langkah 2

Eliminasi variabel x dari Persamaan (2.12) dan Persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_3 & a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \times a_1 & a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \\ & & \hline & & (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array}$$

$$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \quad (2.21)$$

Langkah 3

Eliminasi variabel y dari Persamaan (2.20) dan Persamaan (2.21)

$$\begin{array}{l|l} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 & \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 & \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada (2.20) terhadap (2.21) dan hasil perkalian koefisien variabel z pada (2.21) terhadap (2.20), maka diperoleh

Download dari situs https://wirahadie.com

$$z = \frac{((a_2d_1 - a_1d_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3d_1 - a_1d_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}{((a_2c_1 - a_1c_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3c_1 - a_1c_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}$$

$$z = \frac{((a_1a_1b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2) - (a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3))}{((a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_1b_1c_2) - (a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3))}$$

$$z = \frac{((a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2) - (a_1b_2d_1 - a_2b_1d_3))}{((a_1b_3c_1 - a_2b_3c_1 - a_2b_1c_2) - (a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3))}$$

$$z = \frac{((a_1b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3) - (a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1))}{((a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3) - (a_1b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_1}$$

Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui). Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisienkoefisien variabel x, y, dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Dengan menggunakan cara menentukan nilai *z*, ditentukan nilai *x* dan *y* dengan cara berikut.

Download dari situs https://wirahadie.com

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Daftar Pustaka :

Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Sudianto Manulang, Lasker Pengarapan Sinaga, dan Mangara Simanjorang. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas X*. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Download dari situs https://wirahadie.com