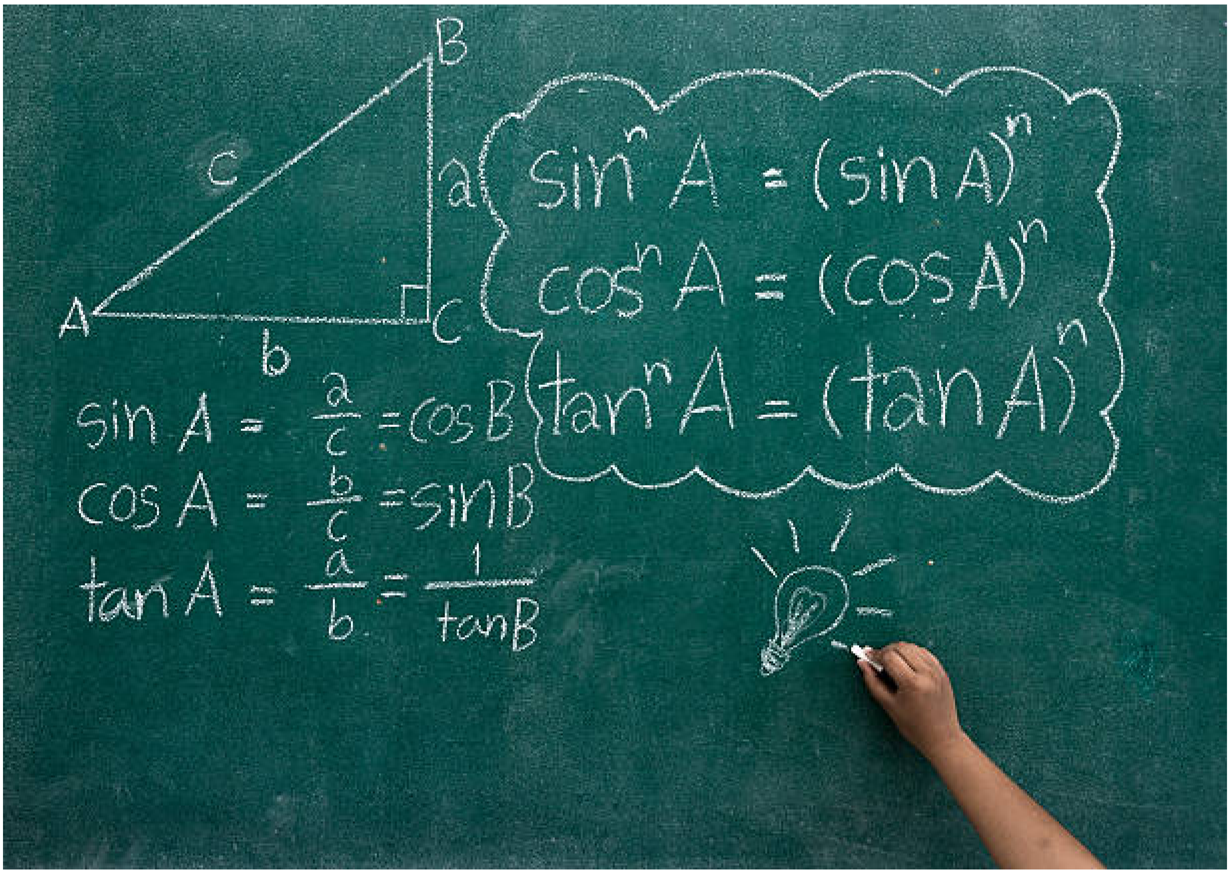
Halo teman-teman! Apa kabarnya nih? Penulis berharap kamu selalu dalam keadaan sehat dan tetap semangat mengikuti pelajaran online ya! Kali ini penulis akan melanjutkan materi Matematika kelas 10 bab 4 mengenai trigonometri.

Apakah kamu sudah siap? Jangan lupa siapkan buku ajar dari Kemdikbud dan catat poin penting di buku kamu! Yuk, *cekidot* ke rangkuman di bawah ini!

Bab 4: Trigonometri



Writing the mathematics formulas on a blackboard

4.1 Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda “ o ” dan “ rad ” berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = 360°, atau 1° didefenisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh 1/360 kali putaran.

Sifat

$\angle AOB = AB/r =$ rad

Sifat 4.2

$360^\circ = 2\pi$ rad atau $1^\circ = \pi/180^\circ$ rad atau 1 rad $= 180^\circ/\pi$ $57,3^\circ$

Contoh

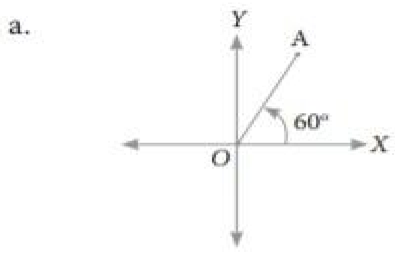
Gambarkan sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut

pada koordinat kartesius.

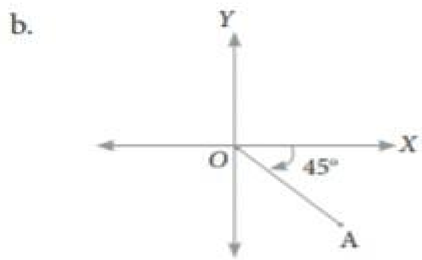
a. 60o

b. –45o

Alternatif Penyelesaian



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran I.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran IV.

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

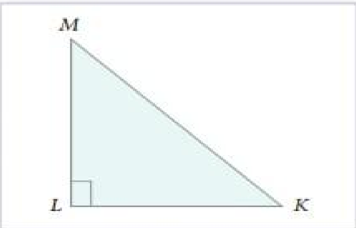
Trigonometri berasal dari bahasa Yunani. Trigonon artinya tiga sudut dan metro artinya mengukur. Ilmuwan Yunani di masa Helenistik, Hipparchus (190 B.C – 120 B.C) diyakini adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang trigonometri dari keingintahuannya akan dunia.

Contoh

Diketahui suatu segitiga siku-siku KLM, ∠L = 90°, dan tan M = 1.

Hitung nilai dari $(\sin M)^2 + (\cos M)^2$ dan 2 . sin M . cos M.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.14 Segitiga siku-siku *KLM*

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, coba cermati gambar berikut ini.

Diketahui tan $M = 1$, artinya;

$\tan M = 1 \Rightarrow \dfrac{KL}{LM} = 1$ atau $KL = LM = k$,

dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh

$$KM = \sqrt{LM^2 + LM^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = k\sqrt{2}$$

Akibatnya, $\sin M = \dfrac{KL}{KM} = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ atau $(\sin M)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\cos M = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ atau $(\cos M)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Jadi, $(\sin M)^2 + (\cos M)^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ dan $2 \,.\, \sin M \,.\, \cos M = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

4.3 Nilai Perbandingan Trigonometri untuk 0°, 30°, 45°, 60° dan 90°

Pada saat mempelajari teori trigonometri, secara tidak langsung kamu harus menggunakan beberapa teori geometri. Dalam geometri, khususnya dalam kajian konstruksi sudah tidak asing lagi dengan penggunaan besar sudut 30°, 45°, dan 60°. Pada subbab ini, kamu akan menyelidiki dan menghitung nilai perbandingan trigonometri untuk ukuran sudut 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°.

Contoh

Diketahui sin (A – B) = 1/2, cos (A + B) = 1/2, 0° < (A + B) < 90°, A > B

Hitung sin A dan tan B.

Alternatif Penyelesaian

Untuk memulai memecahkan masalah tersebut, harus dapat mengartikan $0^\circ < (A + B) < 90^\circ$, yaitu kita harus menentukan dua sudut A dan B, sedemikian sehingga $\cos (A + B) = ½$ dan $\sin (A – B) = 1/2$

Lihat kembali Tabel 4.2, $\cos a = ½$ (a adalah sudut lancip), maka $a = 60^\circ$
Jadi, diperoleh: $A + B = 60^\circ$ (1*)

Selanjutnya, dari Tabel 4.2, $\sin a = ½$ (a adalah sudut lancip), maka $a = 30^\circ$
Jadi, kita peroleh: $A – B = 30^\circ$ (2*)

Dari (1*) dan (2*), dengan cara eliminasi maka diperoleh $A = 45^\circ$ dan $B = 15^\circ$

4.4 Relasi Sudut

Sifat

Jika $0^\circ \leq a \leq 90^\circ$, maka berlaku

a. $\sin (90^\circ – a) = \cos a$ d. $\csc (90^\circ – a) = \sec a$

b. $\cos (90^\circ – a) = \sin a$ e. $\sec (90^\circ – a) = \csc a$

c. $\tan (90^\circ – a) = \cot a$ f. $\cot (90^\circ – a) = \tan a$

Untuk setiap $0^\circ < a < 90^\circ$

a. $\sin (90^\circ + a) = \cos a$ g. $\sin (180^\circ + a) = –\sin a$

b. cos (90° + *a*) = –sin *a* h. cos (180° + *a*) = –cos *a*

c. tan (90° + *a*) = –cot *a* i. tan (180° + *a*) = tan *a*

d. sin (180° – *a*) = sin *a* j. sin (360° – *a*) = –sin *a*

e. cos (180° – *a*) = –cos *a* k. cos (360° – *a*) = cos *a*

f. tan (180° – *a*) = –tan *a* l. tan (360° – *a*) = –tan *a*

4.5 Identitas Trigonometri

Sifat

Untuk setiap besaran sudut a, berlaku bahwa

a. sin2 a + cos2 a = 1 ↔ sin2 a = 1 – cos2 a **atau** cos2 a = 1 – sin2 a

b. 1 + cot2 a = csc2 a ↔ cot2 a = csc2 a - 1 **atau** csc2 a - cot2 a = 1

c. tan2 a + 1 = sec2 a ↔ tan2 a = sec2 a – 1 **atau** tan2 a – sec2 a = 1

Contoh

Misalkan 0° < β < 90° dan tan β = 3

Hitung nilai sin β dan cos β.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan definisi perbandingan dan identitas trigonometri, diperoleh $\cot \beta = \frac{1}{3}$.

Akibatnya, $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha \leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \csc^2 \alpha$

$$\leftrightarrow \frac{10}{9} = \csc^2 \alpha \text{ atau } \csc \alpha = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \text{ (Mengapa?)}$$

Karena $\sin \beta = \frac{1}{\csc \beta}$, maka $\sin \beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$

Dengan menggunakan $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, diperoleh:

$3^2 + 1 = \sec^2 \alpha \rightarrow \sec^2 \alpha = 10$ atau $\sec \alpha = \sqrt{10}$ (Mengapa?)

Karena $\cos \beta = \frac{1}{\csc \beta}$, maka $\cos = \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

4.6 Aturan *Sinus* dan *Cosinus*

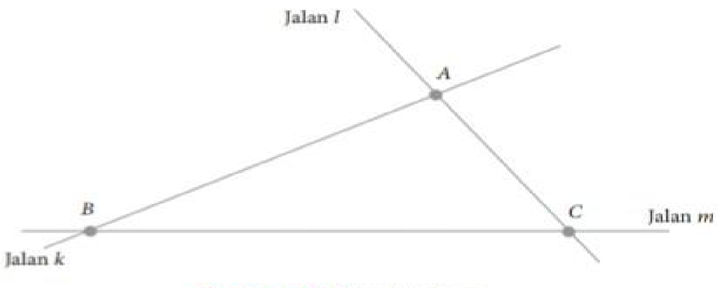
Definisi

Untuk setiap segitiga sembarang, Garis tinggi adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan berpotongan tegak lurus dengan sisi di hadapannya. Garis berat adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan memotong sisi di hadapannya menjadi dua bagian yang sama panjang.

Contoh

Jalan *k* dan jalan *l* berpotongan di kota A. Dinas tata ruang kota ingin menghubungkan kota B dengan kota C dengan membangun jalan *m* dan memotong kedua jalan yang ada, seperti yang ditunjukkan Gambar 4.42 di bawah.

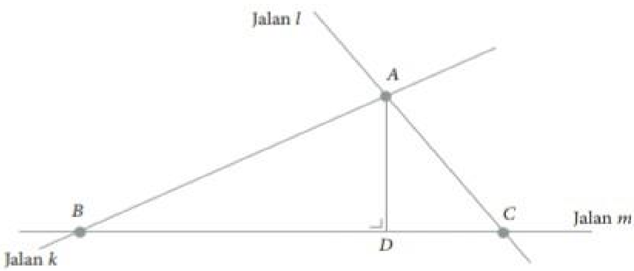
Jika jarak antara kota A dan kota C adalah 5 km, sudut yang dibentuk jalan *m* dengan jalan *l* adalah 70o dan sudut yang dibentuk jalan *k* dan jalan *m* adalah 30o. Tentukan jarak kota A dengan kota B.



Gambar 4.42 Jalan *k*, *l*, dan *m*

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan perhitungan, kita bentuk garis tinggi *AD*, dimana garis *AD* tegak lurus dengan garis *BC*, seperti pada Gambar 4.43.



Gambar 4.43 Segitiga *ABC* dengan garis tinggi *D*

Dengan menggunakan konsep perbandingan trigonometri (Definisi 4.1), pada ΔABC, dapat kita tuliskan bahwa

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \text{ atau } AD = AB \times \sin B \qquad (19)$$

Sedangkan pada ΔACD, kita peroleh

$$\sin C = \frac{AD}{AC} \text{ atau } AD = AC \times \sin C \qquad (20)$$

Dari persamaan (19) dan (20), kita peroleh bahwa

$$AB \times \sin B = AC \times \sin C \qquad (21)$$

Karena diketahui bahwa $\angle C = 70^o$, $\angle B = 30^o$, dan jarak $AC = 5$, dengan persamaan (21) diperoleh

$AB \times \sin 30^o = AC \times \sin 70^o$,

$$AB = \frac{5 \times \sin 70^o}{\sin 30^o} = \frac{5 \times (0,94)}{0,5} = 9,4 \text{ km}.$$

Jadi, jarak kota A dengan kota B adalah 9, 4 km.

4.7 Grafik Fungsi Trigonometri

Masalah

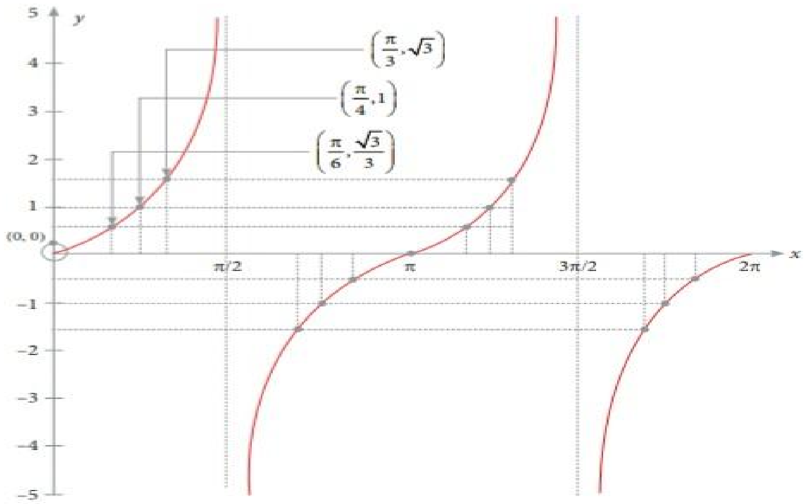
Untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$, gambarkan grafik fungsi $y = \tan x$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan nilai-nilai *tangen* yang telah kita temukan dan dengan pengetahuan serta keterampilan yang telah kamu pelajari tentang menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dengan mudah memahami pasangan titik-titik berikut.

$(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, \sim\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
$(\pi, 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, \sim\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4}, -1\right)$;
$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $(2\pi, 0)$.

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \le x \le 2\pi$, seperti pada Gambar 4.51 berikut ini.



Dari grafik di atas, jelas kita lihat bahwa jika *x* semakin mendekati π/2 (dari kiri), nilai fungsi semakin besar, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terbesarnya. Sebaliknya, jika *x* atau mendekati π/2 (dari kanan), maka nilai fungsi semakin kecil, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terkecilnya. Kondisi ini berulang pada saat *x* mendekati 3π/2. Artinya, fungsi $y = \tan x$, tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.

Daftar Pustaka :

Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Sudianto Manulang, Lasker Pengarapan Sinaga, dan Mangara Simanjorang. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas X.* Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.