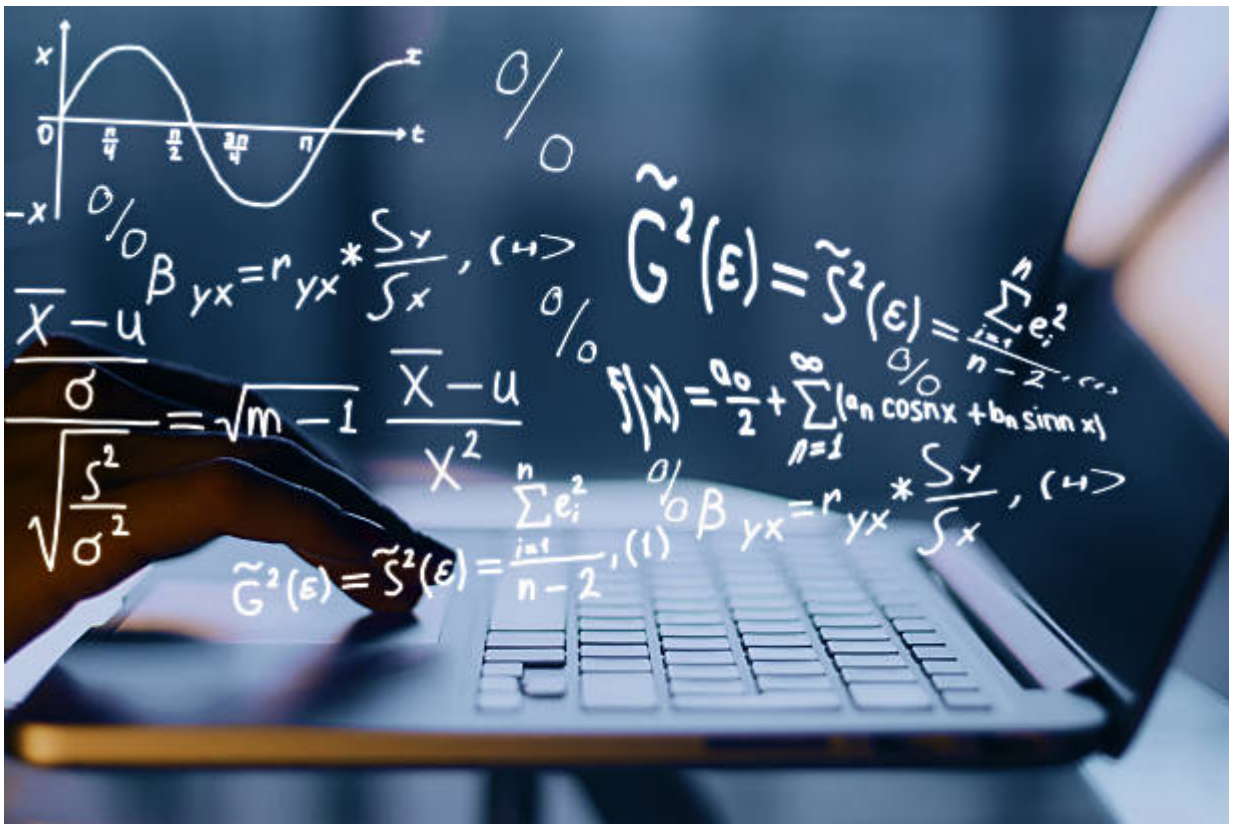
Halo teman-teman! Apa kabarnya? Semoga kamu selalu sehat dan tetap semangat mengikuti pembelajaran via daring ya! Kali ini penulis akan melanjutkan materi Matematika kelas 11 bab 1 mengenai induksi Matematika.

Apakah kamu sudah siap? Oh iya, jangan lupa siapkan buku ajar keluaran Kemdikbud dan juga catat materi yang menurutmu penting! *So*, langsung simak ulasan di bawah ini ya!

Bab 1:
Induksi Matematika



Hands using laptop with mathematical formulas. Online education concept

1.1 Pengantar Induksi Matematika

Masalah

Tanpa menggunakan alat bantu hitung, rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan

Download dari situs https://wirahadie.com

bilangan mulai 1 hingga 20. Kemudian, uji kebenaran formula yang ditemukan sedemikian sehingga berlaku untuk penjumlahan bilangan mulai dari 1 hingga n, dengan n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

a. Pola yang terdapat pada, yaitu:

- Selisih dua bilangan yang berurutan selalu sama yaitu 1.
- Hasil (1 + 20) = (2 +19) = (3 + 18) = (4 + 17) = . . . = (10 +11) = 21.

Artinya terdapat sebanyak 10 pasang bilangan yang jumlahnya sama dengan 21.
Jadi hasil 1 + 2 + 3 + . . . + 18 + 19 + 20 = (20/2) .21 = 210.

b. Untuk mengetahui pola yang terdapat pada 1 + 2 + 3 + . . . + n, untuk n bilangan asli, perlu dipilih sebarang $n > 20$. Misalnya kita pilih $n = 200$. Sekarang, kita akan menyelidiki apakah pola yang terdapat pada 1 + 2 + 3 + . . . + 18 + 19 + 20 berlaku pada 1 + 2 + 3 + . . . + 198 + 199 + 200?

- Selisih dua bilangan yang berurutan selalu sama yaitu 1.
- Hasil (1 + 200) = (2 +199) = (3 + 198) = (4 + 197) = . . . = (100 +101) = 201.
- Artinya terdapat sebanyak 100 pasang bilangan yang jumlahnya sama dengan 201.

Jadi hasil 1 + 2 + 3 + . . . + 198 + 199 + 200 = (200/2).201 = 20.100

Dengan demikian untuk sebarang n bilangan asli yang genap, kamu dapat menentukan jumlah bilangan berurutan mulai dari 1 hingga n.

1.2 Prinsip Induksi Matematika

Contoh

Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan $n2$.

Download dari situs https://wirahadie.com

Alternatif Penyelesaian

Tentu kamu mengetahui pola bilangan ganjil positif, yaitu: $2n - 1$, untuk n bilangan asli. Sedemikian sehingga akan ditunjukkan bahwa:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Sebut, $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Untuk membuktikan kebenaran formula $P(n)$, kita harus menyelidiki apakah $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, yaitu langkah awal dan langkah induksi.

a) Langkah awal:

Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 1 = 1^2 = 1$.

Jadi $P(1)$ benar.

b) Langkah Induksi:

Karena $P(1)$ benar, maka $P(2)$ juga benar, hingga dapat diperoleh untuk $n = k$,

$P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ juga benar, untuk setiap k bilangan asli.

Akan ditunjukkan untuk bahwa untuk $n = k + 1$, sedemikian sehingga

$P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ adalah suatu pernyataan yang benar.

Karena $P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k2$ adalah pernyataan yang benar, maka

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Jika kedua ruas ditambahkan dengan $(2k + 1)$, akibatnya

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Jadi, dengan $P(k)$ ditemukan $P(k + 1)$.

Dengan demikian terbukti bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar, untuk

Download dari situs https://wirahadie.com

setiap n bilangan asli.

Karena formula $P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2 adalah benar, dengan n bilangan asli.

1.3 Bentuk-Bentuk Penerapan Induksi Matematika

1.3.1 Penerapan Induksi Matematika pada Barisan Bilangan

Masalah

Misalkan *ui* menyatakan suku ke i suatu barisan bilangan asli, dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Diberikan barisan bilangan asli, 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...

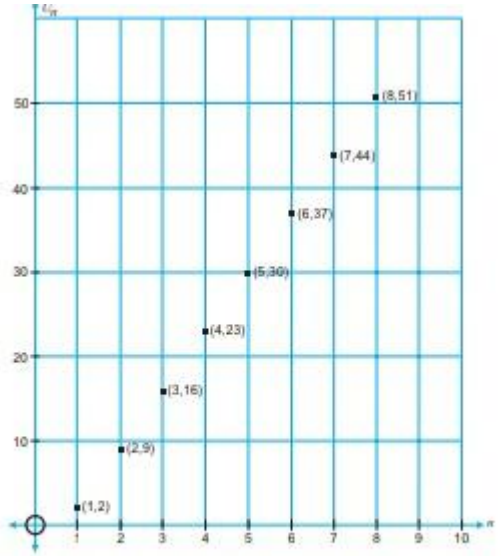
Rancang suatu formula untuk menghitung suku ke 1.000 barisan bilangan tersebut. Ujilah kebenaran formula yang diperoleh dengan menggunakan induksi matematika.

Alternatif Penyelesaian

Terlebih dahulu kita mengkaji barisan bilangan asli yang diberikan, bahwa untuk $n = 1$ maka $u_1 = 2$; untuk $n = 2$ maka $u_2 = 9$; untuk $n = 3$ maka $u_3 = 16$; demikian seterusnya.

Artinya kita harus merancang suatu formula sedemikian sehingga formula tersebut dapat menentukan semua suku-suku barisan bilangan tersebut. Mari kita telaah hubungan antara n dengan sukusuku barisan bilangan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, . . . yang dideskripsikan pada Gambar 1.3.

Download dari situs https://wirahadie.com



Gambar 1.3. Sebaran titik yang dibentuk oleh n dengan suku-suku barisan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...

1.3.2 Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Contoh

Dengan induksi matematika, tunjukkan bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

Kita misalkan $P(n) = 11^n - 6$, dengan n bilangan asli.

Pada contoh ini kita harus menunjukkan bahwa $11^n - 6$ dapat dituliskan sebagai bilangan kelipatan 5. Akan ditunjukkan bahwa $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal

Kita dapat memilih $n = 3$, sedemikian sehingga, $11^3 - 6 = 1.325$ dan 1.325 habis dibagi 5, yaitu $1.325 = 5(265)$. Dengan demikian $P(3)$ habis dibagi 5.

b) Langakah Induksi

Karena $P(3)$ benar, maka $P(4)$ benar, sedemikian sehingga disimpulkan $P(k) = 11k - 6$ benar, untuk k bilangan asli. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $P(k) = 11^k - 6$ habis dibagi 5, maka $P(k + 1) = 11^{(k+1)} - 6$ habis dibagi 5.

Download dari situs https://wirahadie.com

Karena 11^k – 6 habis dibagi 5, maka dapat kita misalkan 11^k – 6 = 5m, untuk m bilangan bulat positif. Akibatnya, 11k = 5m + 6.

Bentuk 11^k + 1 – 6 = 11k(11) – 6,

= (5m + 6)(11) – 6 (karena 11k = 5m + 6)

= 55m + 60

= 5(11m + 12).

Dengan demikian $P(k + 1) = 11^{(k + 1)}$ – 6 dapat dinyatakan sebagai kelipatan 5, yaitu 5(11m + 12). Jadi benar bahwa $P(k + 1) = 11^{(k + 1)}$ – 6 habis dibagi 5.

Karena $P(n) = 11^n$ – 6 memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka terbukti $P(n) = 11^n$ – 6 habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Daftar Pustaka :

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI*. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Download dari situs https://wirahadie.com