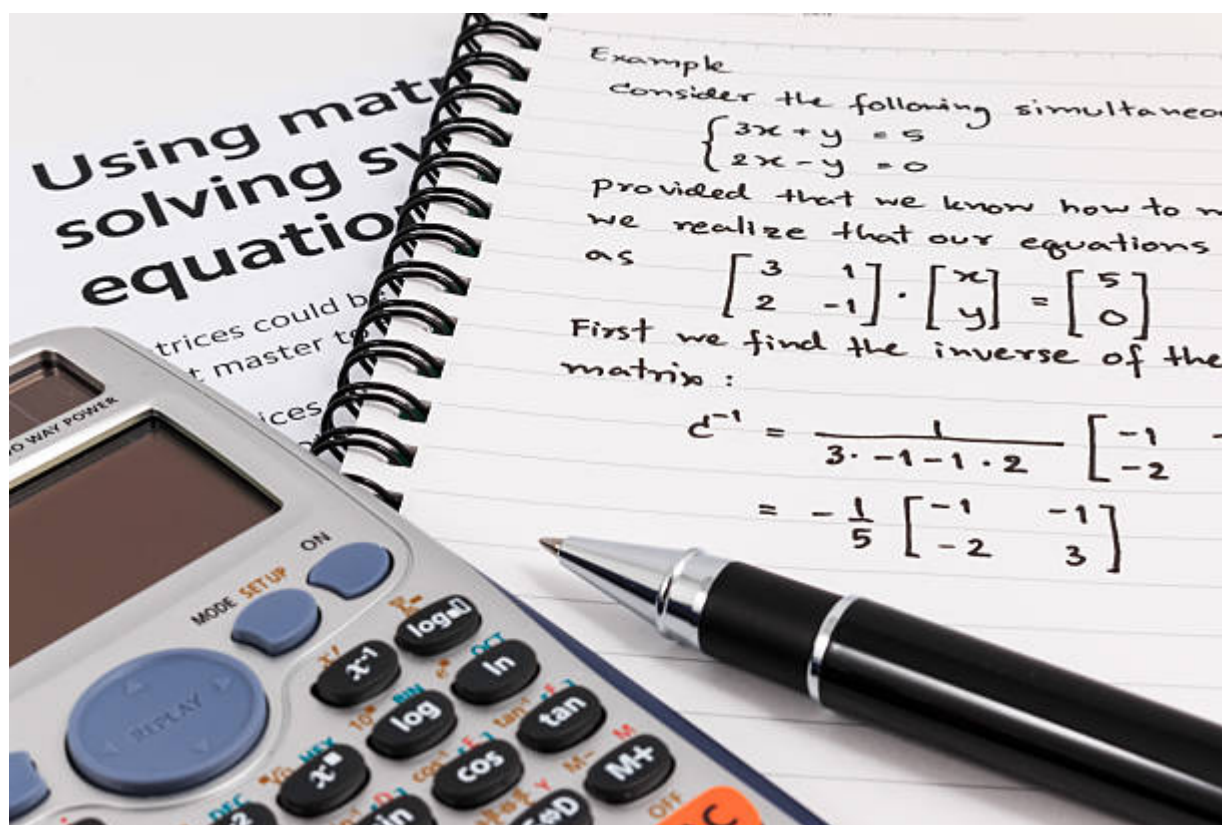


Halo teman-teman! Apa kabarnya nih? Penulis harap kamu selalu sehat dan tetap semangat mengikuti pembelajaran *online* ya. Kali ini kita akan melanjutkan [materi Matematika kelas 11](#) bab 3 tentang matrik.

Oh iya, jangan lupa untuk menyiapkan buku ajar keluaran Kemdikbud dan mencatat informasi penting di bawah ini ya *guys!* So, yuk langsung cek rangkuman berikut!

Bab 3: Matrik



Step to using matrices when solving system of equations.

3.1 Membangun Konsep Matriks

Definisi

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu

jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa “()” atau kurung siku “[]”.

Contoh

Teguh, siswa kelas IX SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, dan Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun.

Selain itu, dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu melakukan variasi susunan matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2 \times 3}$ adalah matriks persegi panjang dengan berordo 2×3 .

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3 \times 2}$ adalah matriks persegi panjang berordo 3×2 .

3.2 Jenis-Jenis Matriks

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini adalah $1 \times n$, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Matriks kolom dengan ordo $m \times 1$, dengan m banyak baris pada matriks tersebut.

c. Matriks Persegi Panjang

Matriks persegi panjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo $m \times n$.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F dengan ordo 4×4 . Terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi,

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep pada matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks persegi.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola.

h. Matriks Nol

Jika entry suatu matriks semuanya bernilai nol, maka disebut matriks nol.

3.3 Kesamaan Dua Matriks***Definisi***

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$) jika dan hanya jika:

- i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B .

ii. Setiap entri yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh

Tentukanlah nilai a , b , c , dan d yang memenuhi matriks $Pt = Q$, dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Alternatif Penyelesaian

Karena P merupakan matriks dengan ordo 2×3 , maka Pt merupakan matriks dengan ordo 2×3 . Matriks Q merupakan matriks dengan ordo 2×3 . Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks $Pt = Q$.

Dengan $Pt = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya, kesamaan $Pt = Q$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan di atas, kita temukan nilai a , b , c , dan d sebagai berikut.

- $3b = 3$ maka $b = 1$, dan $2c = 6$ maka $c = 3$.
- $2a - 4 = -4$ maka $a = 0$.
- Karena $a = 0$ maka $d = -3$.

Jadi, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, dan $d = -3$.

3.4 Operasi pada Matriks

3.4.1 Operasi Penjumlahan

Definisi

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan entri-entri a_{ij} dan b_{ij} . Matriks C

adalah jumlah matriks A dan matriks B , ditulis $C = A + B$, apabila matriks C juga dengan ordo $m \times n$ dengan entry-entry ditentukan oleh: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Contoh

a) Jika $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ 1 & x-7 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$, dan $P + Q = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai x dan y !

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka hasil jumlah matriks P dan Q adalah R

$$= \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \text{ sementara } P + Q = \begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$x + 2 = 12 \Rightarrow x = 10$$

$$x - 7 + y = 3 \Rightarrow 10 - 7 + y = 3 \text{ atau } y = 0$$

Maka diperoleh nilai $x = 10$ dan $y = 0$.

3.4.2 Operasi Pengurangan Matriks

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a). Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b). Diketahui matriks-matriks X , Y dan Z sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini.

- i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$

Alternatif Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2 , sedangkan matriks Z dengan ordo 3×3 . Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (kenapa)?

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pemahaman contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung entry-entry yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$.

3.5 Determinan dan Invers Matriks

3.5.1 Determinan Matriks

Masalah

Siti dan teman-temannya makan di kantin sekolah. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk.

Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas. Jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesannya.

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Petunjuk: Ingat kembali materi sistem persamaan linear yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.

Misalkan x = harga ayam penyet per porsi

y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$
 $5x + 3y = 115.000$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linear.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}, a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1 \quad (3.2)$$

Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV. Tentunya kamu mampu menunjukkannya.

Cara II

Dalam konsep matriks, nilai $(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$ disebut sebagai determinan matriks

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ dinotasikan } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ atau } \det A, \text{ dengan matriks } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A.$$

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (3.2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (3.3)$$

dengan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Kembali ke persamaan (3.1), dengan menerapkan persamaan (3.3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{210.000 - 230.000}{9 - 10} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{345.000 - 350.000}{9 - 10} = \frac{-5.000}{-1} = 5.000$$

Jadi, harga ayam penyet satu porsi adalah Rp20.000,00 dan harga es jeruk safu gelas adalah Rp5.000,00.

Notasi Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinan dari matriks A dapat dinyatakan

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3.5.2 Sifat-Sifat Determinan

Sifat

Misalkan matriks A dan B dengan ordo $m \times m$ dengan $m \in N$. Jika $\det A = |A|$ dan $\det B = |B|$, maka $|AB| = |A| \cdot |B|$

3.5.3 Invers Matriks

Definisi

Misalkan A sebuah matriks persegi dengan ordo $n \times n$, $n \in N$

- Matriks A disebut matriks nonsingular, apabila $\det A \neq 0$.
- Matriks A disebut matriks singular apabila $\det A = 0$.
- A^{-1} disebut invers matriks A jika dan hanya jika $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

I adalah matriks identitas perkalian matriks.

diperoleh *invers* matriks A . Dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

3.5.4 Sifat-Sifat Invers Matriks

Sifat

Misalkan matriks A dengan ordo $n \times n$ dengan $n \in N$, $\det(A) \neq 0$. Jika A^{-1} adalah *invers* matriks A , maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

Misalkan matriks A dan B berordo $n \times n$ dengan $n \in N$, $\det A \neq 0$ dan $\det B \neq 0$. Jika A^{-1} dan B^{-1} adalah *invers* matriks A dan B , maka $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Daftar Pustaka:

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI*. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.