

Contoh

Suatu barisan dengan pola $s_n = 2n^3 - 3n^2$. Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10.

Alternatif Penyelesaian

Dengan rumus $u_n = s_n - s_{n-1}$ maka dapat ditentukan $s_n = 2n^3 - 3n^2$ atau

$s_m = 2m^3 - 3m^2$. Misalkan $m = n - 1$ maka

$$S_{n-1} = 2(n-1)^3 - 3(n-1)^2$$

$$S_{n-1} = (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2) - (3n^2 - 6n + 3)$$

$$S_{n-1} = 2n^3 - 9n^2 + 12n - 5$$

Jadi,

$$U_n = S_n - S_{n-1} = (2n^3 - 3n^2) - (2n^3 - 9n^2 + 12n - 5)$$

$$U_n = 6n^2 - 12n + 5$$

Pola barisan tersebut adalah $6 \ 2 \ 12 \ 5 \ n \ u = n - n +$ sehingga:

$$u_{10} = 6(10)^2 - 12(10) + 5 = 600 - 120 + 5 = 485$$

Jadi, suku ke-10 pada barisan tersebut adalah 485.

5.2 Menemukan Konsep Barisan Aritmetika**Definisi**

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama. Beda, dinotasikan "**b**" memenuhi pola berikut. $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots = u_n - u_{n-1}$

n : bilangan asli sebagai nomor suku, u_n adalah suku ke- n .

Sifat

Jika $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika. Suku ke- n barisan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$u_n = a + (n - 1)b$$

$a = u_1$ = suku pertama barisan aritmetika, b = beda barisan aritmetika.

Contoh:

Suku ke-4 barisan aritmetika adalah 19 dan suku ke-7 adalah 31. Tentukan suku ke-50.

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & a + (n - 1)b \\ u_4 & = & 19 \quad = \quad a + 3b \\ u_7 & = & 31 \quad = \quad a + 6b - \\ \hline & & -3b \quad = \quad -12 \\ & & b \quad = \quad 4 \end{array}$$

$$a + 3b = 19$$

$$a + 3(4) = 19$$

$$a = 7$$

$$u_{50} = a + 49b$$

$$= 7 + 49(4)$$

$$= 203$$

5.3 Menemukan Konsep Barisan Geometri

Definisi

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai perbandingan (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap. Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berdekatan.

Nilai r dinyatakan: $r = u_2/u_1 = u_3/u_2 = u_4/u_3 = \dots = u_n/u_{n-1}$

Sifat

Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan susunan suku-suku barisan geometri, dengan $u_1 = a$ dan r : rasio, maka suku ke- n dinyatakan **$u_n = a \cdot r^{n-1}$, n adalah bilangan asli**

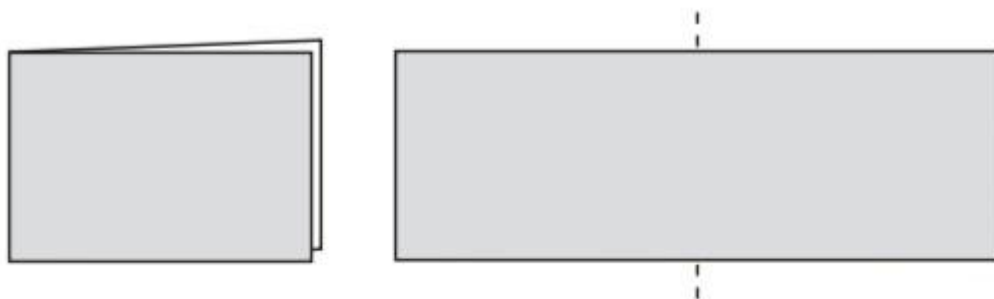
Contoh 5.8

Seorang anak memiliki selembar kertas. Berikut ini disajikan satu bagian kertas.



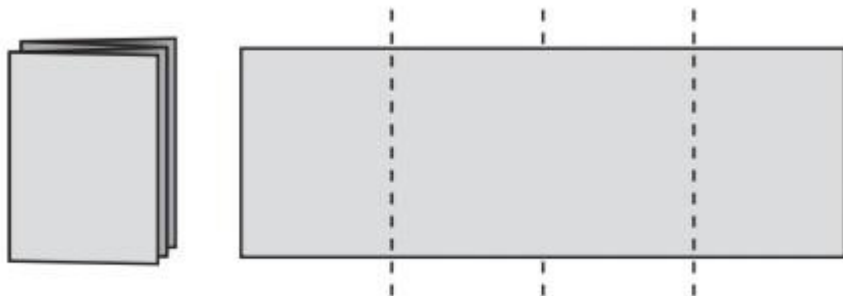
Gambar 5.9: Selembar Kertas

Ia melipat kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar. Kertas terbagi menjadi 2 bagian yang sama besar.



Gambar 5.10: Selembar Kertas pada Lipatan Pertama

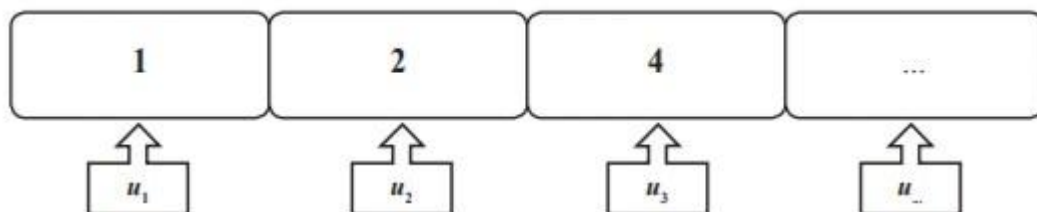
Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya. Kertas terbagi menjadi 4 bagian yang sama besar.



Gambar 5.11: Selembar Kertas pada Lipatan Kedua

Ia terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat, ia selalu membuka hasil lipatan dan mendapatkan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian sebelumnya. Sekarang, perhatikan bagian kertas tersebut yang membentuk sebuah barisan bilangan.

BARISAN DAN KETUKAN



Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$. Barisan bilangan ini disebut **barisan geometri**.

5.4 Aplikasi Barisan

5.4.1 Pertumbuhan

Contoh

Penduduk suatu kota metropolitan tercatat 3,25 juta jiwa pada tahun 2008, diperkirakan menjadi 4,5 jiwa pada tahun 2013. Jika tahun 2008 dianggap tahun dasar, berapa persen pertumbuhannya? Berapa jumlah penduduknya pada tahun 2015?

Alternatif Penyelesaian

Persentase pertumbuhan penduduk:

$$P_n = P_0 (1 + i)_n$$

$$4,5 = 3,25 (1 + i)^{2013-2008}$$

$$4,5 = 3,25 (1 + i)^5$$

$$4,5/3,25 = (1 + i)^5$$

$$1,3846 = (1 + i)^5$$

$$1,3846^{1/5} = 1 + i$$

$$i = 1,3846^{1/5} - 1$$

$$i = 0,0673 = 6,73 \%$$

Jadi, persentase pertumbuhan penduduknya 6,73%.

Jumlah penduduk pada tahun 2015.

$$P_{2015} = P_{2008} (1 + i)^{2015-2008}$$

$$= 3,25 (1 + 6,73\%)^7$$

$$= 3,25 (1,577632) = 5,13$$

Jadi, jumlah penduduk kota metropolitan pada tahun 2015 sebanyak 5,13 juta.

5.4.2 Peluruhan

Masalah

Suatu neutron dapat pecah mendadak menjadi suatu proton dan elektron dan ini terjadi sedemikian sehingga jika kita memiliki 1.000.000 neutron, kira-kira 5% dari padanya akan berubah pada akhir satu menit. Berapa neutron yang masih ada setelah n menit dan 10 menit?

Alternatif Penyelesaian

Misalnya banyak neutron adalah M dan persentase peluruhan (penyusutan) sebesar p % tiap menit, maka:

Banyak neutron semula $= M$

Banyak neutron setelah 1 menit $= M - \frac{p}{100} M = M \left(1 - \frac{p}{100} \right)$

Banyak neutron setelah 2 menit $= M \left(1 - \frac{p}{100} \right) - \frac{p}{100} M \left(1 - \frac{p}{100} \right) = M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^2$

Banyak neutron setelah 3 menit $= M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^2 - \frac{p}{100} M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^2 = M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^3$

Banyak neutron setelah n menit $= M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n$

Banyak neutron setiap menitnya membentuk barisan geometri

$M, M \left(1 - \frac{p}{100} \right), M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^2, M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^3, \dots, M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n$

$U_n = M \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n$

$U_n = \left(1 - \frac{p}{100} \right) U_{n-1}$, dengan $\left(1 - \frac{p}{100} \right)$ dinamakan faktor peluruhan

$U_n = U_1 \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n$

Dalam kasus ini,

$M = 1.000.000$

$p = 5\%$, maka

$U_n = 1.000.000 \left(1 - \frac{5}{100} \right)^n = 1.000.000 (0,95)^n$,

Dengan faktor peluruhannya $= 0,95$.

$U_{10} = 1.000.000 (0,95)^{10}$

$\text{Log } U_{10} = \log 1.000.000 + 10 \log 0,95$

$= 6 + 10 (0,9777 - 1) = 5,777$

$U_{10} = 598.412$

Jadi, neutron yang masih ada setelah n menit adalah $1.000.000 (0,95)^n$ dan neutron yang masih ada setelah 10 menit adalah 598.412.

5.4.3 Bunga Majemuk

Masalah

Ovano menerima uang warisan sebesar Rp70.000.000,00 dari orang tuanya dan berniat untuk menginvestasikan dalam bentuk tabungan di bank selama 5 tahun.

Dia menjajaki dua bank yang memiliki sistem pembungaan yang berbeda. Bank BCL menggunakan bunga tunggal sebesar 10% per tahun dan Bank PHP menggunakan majemuk sebesar 9% per tahun. Dari hasil perhitungan pihak bank ia memperoleh ilustrasi investasi sebagai berikut.

BANK BCL			BANK PHP	
Tahun	Bunga	Saldo Uang	Bunga2	Saldo Uang2
0	0	Rp70.000.000.00	0	Rp70.000.000.00
1	Rp7.000.000.00	Rp77.000.000.00	Rp6.300.000.00	Rp76.300.000.00
2	Rp7.000.000.00	Rp84.000.000.00	Rp6.867.000.00	Rp83.167.000.00
3	Rp7.000.000.00	Rp91.000.000.00	Rp7.485.030.00	Rp90.652.030.00
4	Rp7.000.000.00	Rp98.000.000.00	Rp8.158.682.70	Rp98.810.712.70
5	Rp7.000.000.00	Rp105.000.000.00	Rp8.892.964.14	Rp107.703.676.84
	Total investasi	Rp105.000.000.00		Rp107.703.676.84

Dari ilustrasi investasi di atas diperoleh kesimpulan bahwa walaupun Bank PHP menawarkan bunga majemuk yang lebih kecil daripada bunga tunggal Bank BCL namun hasil investasi yang dihasilkan adalah lebih besar.

5.4.4 Anuitas

Anuitas bukan hal yang baru dalam kehidupan ekonomi semisal sistem pembayaran sewa rumah, atau angsuran kredit (motor, rumah, bank, dll) atau pun uang tabungan kita di bank yang setiap bulan mendapatkan bunga, semuanya merupakan contoh konkret dari anuitas.

Contoh

Ibu Depi membeli sebuah sepeda motor dari dealer yang menggunakan sistem anuitas pada pembayaran kreditnya. Harga motor tersebut adalah Rp10.000.000,00 dengan menggunakan tingkat suku bunga 4% per tahun.

Ibu Depi berencana melunaskan kreditnya dengan 6 kali anuitas. Hitunglah besar anuitas yang dibayarkan oleh Ibu Depi?

Alternatif Penyelesaian

Dari masalah tersebut dapat diketahui :

$$M = \text{Rp}10.000.000,00 ; i = 4\% = 0,04 ; n = 6$$

Maka besar anuitasnya:

$$A = 10.000.000 \times \left(\frac{0,04}{1 - (1 + 0,04)^{-6}} \right)$$

$$A = 10.000.000 \times \left(\frac{0,04}{0,209685474} \right)$$

$$A = 10.000.000 \times (0,190761903) = 1.907.619$$

Maka besar anuitas yang dibayarkan tiap pembayarannya sebesar
Rp1.907.619,00.

Daftar Pustaka:

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI*. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.