Halo teman-teman! Apa kabarnya? Penulis harap kamu selalu dalam keadaan sehat dan tetap semangat mengikuti pembelajaran online ya. Kali ini kita akan melanjutkan materi matematika kelas 11 bab 6 mengenai limit fungsi.

Apakah kamu sudah siap? Oh iya, jangan lupa siapkan buku ajar keluaran Kemdikbud dan catat materi penting di rangkuman ini ya. *So*, yuk langsung *kepoin* ulasan di bawah!

Bab 6:
Limit Fungsi

Teenage girl solving mathematical problems. The boy is drawing a graph of a mathematical function. Nikon D850

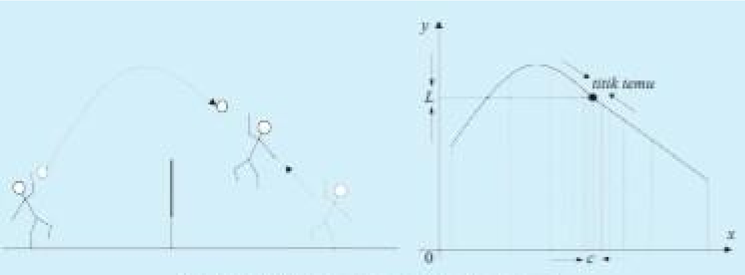
6.1 Konsep Limit Fungsi

6.1.1 Menemukan Konsep Limit Fungsi

Masalah

Seorang atlet bola voli sedang melakukan gerakan *smash* terhadap bola yang telah di-*over* menuju ke arahnya. Atlet tersebut melompat dan bergerak menuju bola sehingga pada saat tertentu dia akan menyentuh bola pada ketinggian tertentu, bukan?

Atlet tersebut hanya dapat menyentuh bola, jika ketinggian tangannya meraih bola sama dengan ketinggian bola. Jika kita amati kasus ini dengan pendekatan koordinat, dapatkah kamu sketsa detik-detik pergerakan bola dan atlet sampai tangan atlet menyentuh bola? Kita sketsa bersama-sama. Perhatikan gambar!



Gambar 6.4: Sketsa pergerakan bola dan atlet voli

Alternatif Penyelesaian

Dari gambar dapat dilihat, bahwa bola yang dipukul ke daerah lawan, disambut oleh salah satu atlet sehingga bola dan atlet bergerak saling mendekati dengan arah yang berlawanan sehingga keduanya bertemu atau bersentuhan (titik temu) pada saat tertentu (titik c).

Gerakan bola semakin dekat dan sangat dekat ke titik temu, demikian juga atlet bergerak semakin dekat dan sangat dekat ke titik temu. Titik temu keduanya menunjukkan ketinggian bola (titik L) dan atlet adalah sama.

Berdasarkan Masalah 6.2, mari kita kaji lebih jauh gerakan objek tersebut dengan memisalkan gerakan membentuk kurva atau sebuah fungsi. Dengan demikian, kita akan lebih memahami konsep limit secara intuitif.

6.1.2 Pemahaman Intuitif Limit Fungsi

Definisi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ dan misalkan L dan c anggota himpunan bilangan real. lim ( ) x c f x → = L jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c.

Catatan:

a. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L.

b. Kita menyatakan bahwa $f(x)$ mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

c. Limit fungsi mempunyai sifat: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

6.2 Sifat-Sifat Limit Fungsi

Sifat 6.1

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ dan misalkan L, c bilangan real.
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$

Contoh

Jika $f(x) = k$ dengan k bilangan real maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $y = f(x)$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.6: Nilai $f(x) = k$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	k	k	k	k	k	k	...	?	...	k	k	k	K	k	k

Jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati k.
Secara matematika, ditulis $\lim\limits_{x \to 1^-} k = k = \lim\limits_{x \to 1^+} k$ atau $\lim\limits_{x \to 1} k = k$ (berdasarkan Sifat 6.1).

Sifat 6.2

Misalkan $f(x) = k$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real, maka $\lim_{x \to c} k = k$

Contoh

Jika $f(x) = x$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $y = f(x) = x$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel: Nilai pendekatan $f(x) = x$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	?	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2.
Secara matematika, ditulis $\lim_{x \to 1^-} x = 1 = \lim_{x \to 1^+} x$ atau $\lim_{x \to 1} x = 1$ (berdasarkan Sifat 6.1).

Sifat 6.3

Misalkan $f(x) = x$, adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, maka $\lim_{x \to c} x = c$

Contoh

Jika $f(x)= kx$ dengan k adalah konstan maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $y = f(x) = kx$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel : Nilai pendekatan $f(x) = kx$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2	1,8	2
y	0	0,5k	0,9k	0,99k	0,999k	...	?	...	1,001k	1,01k	1,1k	1,5k	2k	1,8	2

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} kx = k = \lim\limits_{x \to 1^+} kx$ atau $\lim\limits_{x \to 1} kx = k$

Jika diuraikan maka:

$\lim\limits_{x \to 1} kx = (k) \lim\limits_{x \to 1} (x) = k.1 = k$ (dimana $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$).

Sifat 6.4

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, maka maka $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k[\lim\limits_{x \to c} f(x)]$

Contoh

Jika f(x) = kx2 dengan k adalah konstan maka nilai pendekatan f(x) pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan y = f(x) = kx2 sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel: Nilai pendekatan f(x) = kx2 dengan k adalah konstan pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,01k	0,25k	0,81k	0,9801k	0,998001k	...	?	...	1,002001k	1,0201k	1,21k	2,25k	3,24k	4k

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} kx^2 = k = \lim\limits_{x \to 1^+} kx^2$ atau $\lim\limits_{x \to 1} kx^2 = k$. Bila diuraikan prosesnya maka,

$\lim\limits_{x \to 1} (2x^2) = \lim\limits_{x \to 1} (2)\ (x)\ (x) = \lim\limits_{x \to 1} (2) \lim\limits_{x \to 1} (x) \lim\limits_{x \to 1} (x) = 2.1.1 = 2$

atau

$\lim\limits_{x \to 1} (2x^2) = \lim\limits_{x \to 1} (2)\ (x^2) = \lim\limits_{x \to 1} (2) \lim\limits_{x \to 1} (x^2) = 2.1^2 = 2$

atau

$\lim\limits_{x \to 1} (2x^2) = \lim\limits_{x \to 1} (2x)\ (x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x) \lim\limits_{x \to 1} (x) = 2.1 = 2.$

Sifat 6.5

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c,
$\lim_{x \to c}[f(x)g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)]\,[\lim_{x \to c} g(x)]$

Contoh

Jika $f(x) = x2 - 4x$ maka tentukan nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $y = f(x) = x2 - 4x$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel: Nilai $f(x) = x2 - 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	–1,75	–2,79	–2,98	–2,998	...	?	...	–3,002	–3,02	–3,19	–3,75	–4

Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-} [x^2 - 4x] = -3 = \lim_{x \to 1^+} [x^2 - 4x]$ atau $\lim_{x \to 1} [x^2 - 4x] = -3$.
Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ dan $\lim_{x \to 1} 4x = 4$
maka,

$$\lim_{x \to 1} [x^2 - 4x] = \lim_{x \to 1} [(x^2) - (4x)]$$
$$= \lim_{x \to 1} (x^2) - \lim_{x \to 1} (4x)$$
$$= (1) - (4)$$
$$= -3.$$

Jika $f(x) = x^2 + 4x$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Sifat 6.6

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c,
$\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)] \pm [\lim_{x \to c} g(x)]$

Contoh

Jika $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ maka tentukan nilai $f(x)$ pada saat x mendekati 1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ sehingga nilai fungsi disajikan pada tabel berikut.

Tabel 6.12: Nilai $f(x) = f(x) = \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	3,42	1,96	1,75	1,67	1,67	...	?	...	1,67	1,66	1,59	1,38	1,30

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = 1{,}67 = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ atau $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ = 1,67. Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x \to 1}[x^2 + 4x] = 5$ dan

$\lim\limits_{x \to 1}[2x^2 + x] = 3$ maka,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 4x)}{\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + x)} = \frac{5}{3} \text{ atau } 1{,}67.$$

6.3 Menentukan Nilai Limit Fungsi

Contoh

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Alternatif Penyelesaian:

Cara I (*Numerik*)

Jika $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 6.14: Nilai pendekatan $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	0/0	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Pada tabel, fungsi $y = f(x)$ akan mendekati 0,25 untuk x mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(2) = \frac{0}{0}$ adalah bentuk tak tentu sehingga diperlukan strategi pergantian dengan faktorisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2} \text{ karena } x \neq 2 \\ &= \frac{1}{4} \text{ atau } 0{,}25.\end{aligned}$$

Daftar Pustaka :

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI*. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.