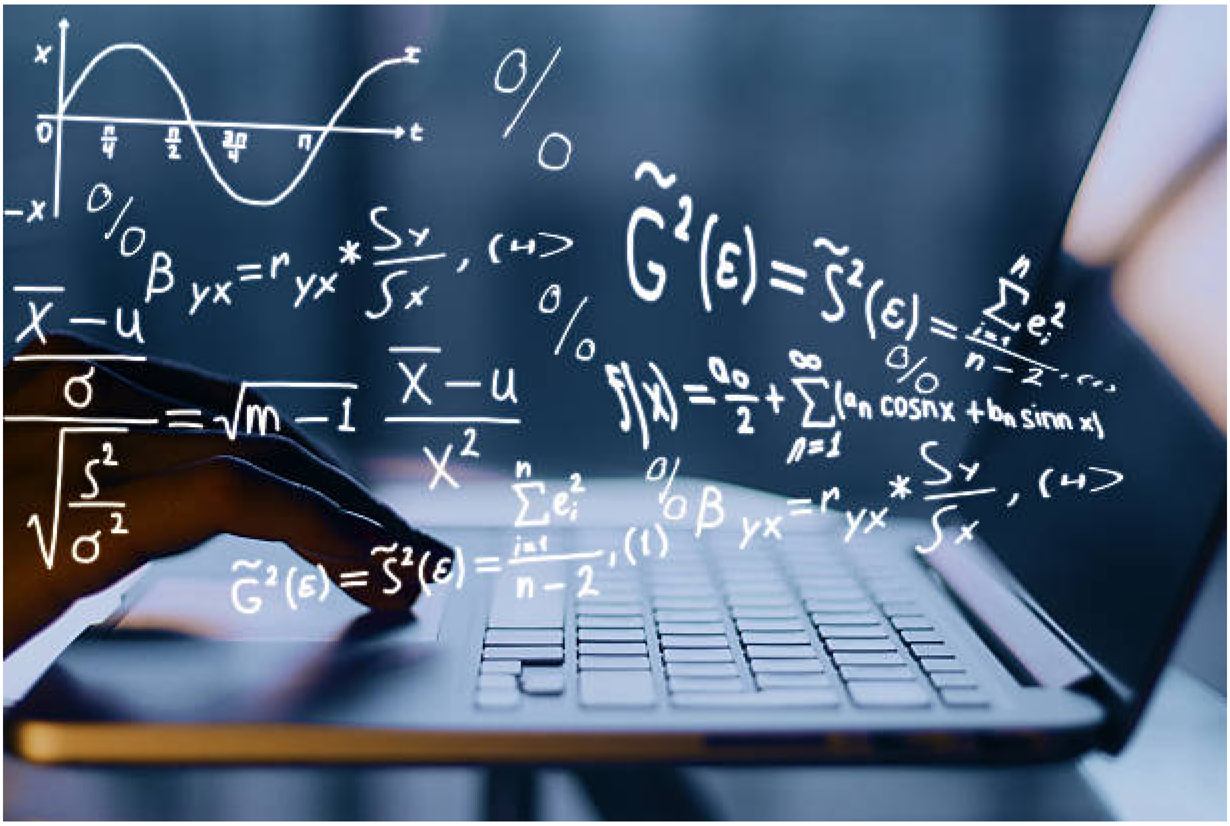
Halo teman-teman! Apa kabarnya? Penulis berharap kamu selalu sehat dan tetap semangat mengikuti pembelajaran online ya. Kali ini kita akan melanjutkan materi Matematika kelas 11 bab 7 mengenai turunan.

Oh iya, jangan lupa untuk menyiapkan buku keluaran Kemdikbud dan catat materi dalam rangkuman berikut ya. *So*, yuk langsung simak ulasan di bawah ini!

Bab 7:
Turunan



Hands using laptop with mathematical formulas. Online education concept

7.1 Menemukan Konsep Turunan Fungsi

Turunan merupakan salah satu dasar atau fondasi dalam analisis dan sangat aplikatif untuk membantu memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

7.1.1 Menemukan Konsep Garis Sekan dan Garis Tangen

Definisi 7.2

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

7.1.2 Turunan Sebagai Limit Fungsi

Definisi 7.3

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika ada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Definisi 7.4

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

Definisi 7.5

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Sifat

Misalkan fungsi $f: S \to R, S \subseteq R$ dengan $x \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis,

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L.$$

Contoh

Jika $f(x) = x^2$ maka $f'(x)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x. \end{aligned}$$

7.2 Turunan Fungsi Aljabar

Contoh

a. Jika $f(x) = x^2$ maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$= 2x.$$

b. Jika $f(x) = x^4$ maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 4x^3.$$

7.3 Aplikasi Turunan

7.3.1 Konsep Kemonotonan Fungsi

Definisi

Misalkan fungsi $f : S \to R$, $S \subseteq R$

- Fungsi f dikatakan naik jika “$x1, x2 \in S, x1 < x2 \Rightarrow f(x1) < f(x2)$
- Fungsi f dikatakan turun jika “$x1, x2 \in S, x1 < x2 \Rightarrow f(x1) > f(x2)$

Contoh

Tunjukkan grafik fungsi $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ adalah fungsi naik.

Alternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$ dengan $0 < x_1 < x_2$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^{\ 3}$

$x = x_2 \Rightarrow f(x_2) = x_2^{\ 3}$

Karena $0 < x_1 < x_2$ maka $x_1^{\ 3} < x_2^{\ 3}$

Karena $x_1^{\ 3} < x_2^{\ 3}$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian "$x \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Dapat disimpulkan f adalah fungsi naik.

7.3.2 Nilai Maksimum atau Minimum Fungsi

Contoh

Tentukan titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Alternatif Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat):
Dengan mengingat konsep fungsi kuadrat. Suatu fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik $B(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ dimana fungsi mencapai maksimum untuk $a < 0$ dan mencapai minimum untuk $a > 0$ sehingga fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai titik balik minimum pada $B(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4(1)}) = B(2,-1)$.

Alternatif Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan):
Dengan menggunakan konsep turunan maka fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai stasioner: $f'(x) = 2x - 4 = 0$ atau $x = 2$ sehingga titik stasioner adalah $B(2, -1)$. Mari kita periksa keoptimalan fungsi dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut, yaitu $f''(2) = 2 > 0$ atau disebut titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah minimum di $B(2, -1)$.

7.3.3 Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi pada Suatu Interval

Contoh

Sebuah partikel diamati pada interval waktu (dalam menit) tertentu berbentuk kurva $f(t)$ =

$t3$ – $9t2$ + $24t$ – 16 pada $0 \leq t \leq 6$. Tentukan nilai optimal pergerakan partikel tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi adalah $\{t|0 \leq t \leq 6\}$

Titik stasioner $f'(t) = 0$

$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ sehingga $f'(t) = 3(t^2 - 6t + 8) = 0$ dan $f''(t) = 6t - 18$

$f'(t) = 3(t - 2)(t - 4) = 0$

$t = 2 \rightarrow f(2) = 4$ dan $t = 4 \rightarrow f(4) = 0$

Karena daerah asal $\{t|0 \leq t \leq 6\}$ dan absis $t = 2$, $t = 4$ ada dalam daerah asal sehingga:

$t = 0 \rightarrow f(0) = -16$ dan $t = 6 \rightarrow f(6) = 20$.

Nilai minimum keempat titik adalah –16 sehingga titik minimum kurva pada daerah asal adalah $A(0, -16)$ dan nilai maksimum keempat titik adalah 20 sehingga titik maksimum kurva pada daerah asal adalah $B(6, 20)$.

7.3.4 Konsep Turunan Dalam Permasalahan Kecepatan dan Percepatan

Contoh

Pada pengamatan tertentu, sebuah partikel bergerak mengikuti sebuah pola yang merupakan fungsi jarak s atas waktu t, yaitu $s(t) = t4 - 6t^2 + 12$. Tentukanlah panjang lintasan dan kecepatan pada saat percepatannya konstan.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui : $s(t) = t^4 - 6t^2 + 12$

Ditanya : $s(t)$ dan $v(t)$ pada saat $a(t) = 0$

Proses penyelesaian

Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi

$v(t) = s'(t) = 4t^3 - 12t$.

Percepatan adalah turunan pertama dari kecepatan

$a(t) = v'(t) = 12t^2 – 12 = 0$

$\Leftrightarrow 12(t + 1)(t – 1) = 0.$

Jadi, percepatan akan konstan pada saat $t = 1$ sehingga:

$v(1) = s'(1) = 4(1)^3 – 12(1) = –8$

$s(1) = (1)^4 – 6(1)^2 + 12 = 7.$

7.4 Menggambar Grafik Fungsi

Contoh

Dengan menggunakan konsep turunan, analisis kurva fungsi $f(x) = x2 – 2x$.

Alternatif Penyelesaian

a. Menentukan titik stasioner ($f'(x) = 0$)

$f'(x) = 2x – 2 = 0$ atau $x = 1$

Titik stasioner $P(1, –1)$

b. Menentukan interval fungsi naik/turun

Fungsi naik pada ($f'(x) > 0$)

$f'(x) = 2x – 2 > 0$ atau $x > 1$

Fungsi turun pada ($f'(x) < 0$)

$f'(x) = 2x – 2 < 0$ atau $x < 1$

c. Menentukan titik belok ($f''(x) = 0$)

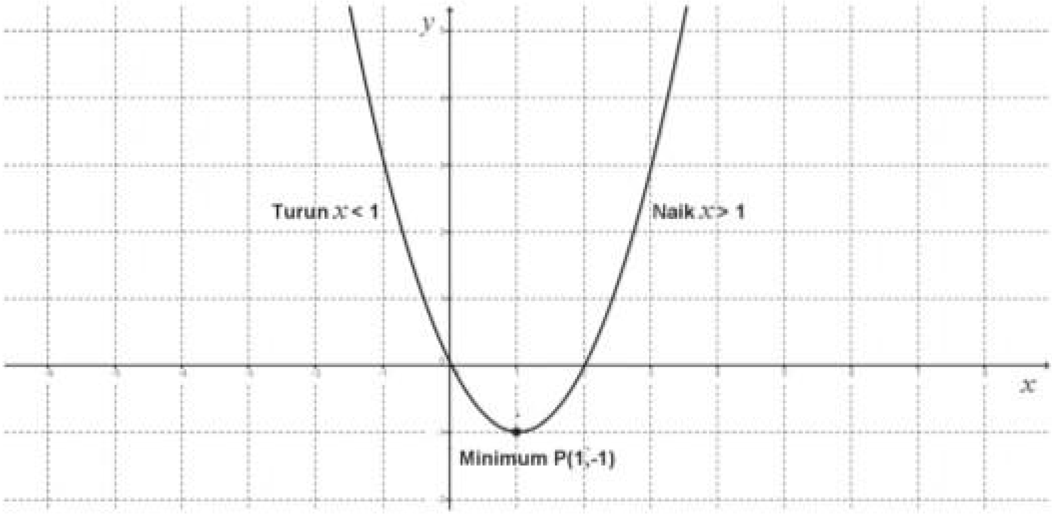
$f''(x) = 2 \neq 0$

Tidak ada titik belok

d. Menentukan titik optimum

Uji titik stasioner ke turunan kedua fungsi

$f''(x) = 2 > 0$ disebut titik minimum di $P(1, -1)$.



Gambar 7.18: Grafik $f(x) = x^2 - 2x$

Daftar Pustaka :

Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MK Kelas XI.* Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.